Questions de cours

Propriétés bases orthonormales

$\vec{e_r} \cdot \vec{e_\theta} = 0$ $\qquad$ $\vec{e_r} \cdot \vec{e_r} = 1$

$\vec{e_\theta} \cdot \vec{e_z} = 0$ $\qquad$ $\vec{e_\theta} \cdot \vec{e_\theta} = 1$

$\vec{e_z} \cdot \vec{e_r} = 0$ $\qquad$ $\vec{e_z} \cdot \vec{e_z} = 1$

Produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} A_y B_z - B_y A_z \\ A_z B_x - B_z A_x \\ A_x B_y - B_x A_y \end{vmatrix}$

Produit $z z' = (a+ib)(a'+ib') = \underbrace{(aa'-bb')}_{\text{réelle}} + i \underbrace{(ab'+a'b)}_{\text{imaginaire}}$

Intégration par parties $\int u\,dv = [uv] - \int v\,du$

Elingage

. On appelle $\vec{P}$ le poids de la charge, $\vec{T}$ la tension du câble principal, et $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions des deux câbles de gauche et droite.

Alors $\vec{T} = -\vec{P}$ et $\vec{T} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

$\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ ont la même composante verticale, donc

$$||\vec{T}||^2 = -\vec{T}.(\vec{T_1} + \vec{T_2}) = -2\vec{T}.\vec{T_1} = 2||\vec{T}||.||\vec{T_1}||\cos(\alpha/2),$$

et finalement $||\vec{T_1}|| = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}$.

inférieur $T_1 \leq mg$ autrement ça casse

Pour que le système tienne, il faut que $||\vec{T_1}||$ soit ~~supérieur~~ à mg, donc $2\cos(\alpha/2) \geq 1$, ce qui est possible si et seulement si $|\alpha/2| \leq \frac{\pi}{3}$, donc il faut et il suffit que l'angle α soit inférieur à $2\pi/3$, soit 120°.

Nombres complexes

. (a) On a $u_0 - v = Ri$, donc $v + RCv' = u_0$, soit $v' = \frac{-1}{RC}v + \frac{u_0}{RC}$.

(b) Si u_0 est une constante U_0, on trouve U_0 comme solution particulière de l'équation, et $Ke^{-\frac{t}{RC}}$ pour solution de l'équation sans second membre associée.

Donc finalement, $v(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_0$.

(c) La dérivée de $\underline{v}(t)$ est $Bj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{v}(t)$. Si on remplace dans l'équation trouv[...] cedemment, et que l'on simplifie tout par $e^{j\omega t}$, on trouve : $Bj\omega e^{j\varphi} = \frac{-1}{RC}Be^{j\varphi} + \frac{A}{RC}$

$$Be^{j\varphi} = \frac{A/RC}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{A}{1+(\omega RC)^2}(1 - j\omega RC).$$

(d) Ainsi, φ est l'argument du nombre $1 - j\omega RC$. Si $\omega RC = 3$, c'est l'argument de 1 $\sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}j)$, soit $-\arccos(\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Dérivation

$$a(x) = -(2x-3)^4, \qquad b(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad c(x) = x\ln(x+2),$$
$$d(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad e(x) = \arccos x, \qquad f(x) = \arcsin\sqrt{1+x}.$$

Exo 12/10

corrigé succinct :

$a'(x) = -2 \times 4 \times (2x-3)^{4-1} = -8(2x-3)^3$ (surtout ne pas développer l'expression pour la dériver ! ! !)

$b'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$c'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

$\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1$

$\sin^2 \arccos = 1 - x^2.$

On peut dériver d en exprimant $d(x)$ comme le produit $x(x^2+1)^{-1/2}$:

$$d'(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2} \times 2x\right).$$

Pour simplifier l'expression, on factorise le x^2+1 qui intervient avec le plus bas degré :

ainsi, $\boxed{d'(x) = (x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2) = (x^2+1)^{-3/2}.}$

La dérivée de arccos est une dérivée de cours, à connaître. Pour démontrer cette formule on part de la relation $\cos\arccos x = x$, que l'on dérive : on obtient $\arccos' x \times (-\sin\arccos x) = 1$, et comme $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$\boxed{e'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.}$ (on rappelle que de même $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui sera utile